МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Е.В. Круглов

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ЭКОНОМИКЕ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института экономики и предпринимательства для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика» (бакалавриат)

Нижний Новгород
2017

УДК 517.9
ББК В16
К 84

К 84 Круглов Е.В. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ЭКОНОМИКЕ: Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 32 с.

Рецензенты: д.ф.-м.н., зав. кафедрой фундаментальной математики НИУ ВШЭ Починка О.В.

Учебно-методическое пособие представляет собой руководство по курсу «Прикладные методы нелинейной динамики в экономике» для студентов института экономики и предпринимательства ННГУ, обучающихся по направлению подготовки бакалавриата 38.03.05 «Бизнес-информатика»

Ответственный за выпуск:
председатель методической комиссии
института экономики и предпринимательства ННГУ,
к.э.н., доцент Летягина Е.Н.

УДК 517.9
ББК В16

Введение

Данное пособие соответствует учебной программе дисциплины «Прикладные методы нелинейной динамики в экономике», составленной в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ОПОП ВО по направлению «Бизнес-информатика» и профилю подготовки «Информатика и математика в анализе экономических систем и бизнеса». Пособие направлено на формирование следующих компетенций: ПК-17 «Способность использовать основные методы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности для теоретического и экспериментального исследования» и ПК-18 «Способность использовать соответствующий математический аппарат и инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования». Пособие также может быть использовано при изучении курсов «Теоретические основы системного анализа» и «Общая теория систем» вышеупомянутой программы бакалавриата, а также курсов «Дифференциальные и разностные уравнения в экономике» и «Прикладные методы нелинейной динамики в анализе бизнес-процессов» направления подготовки магистратуры 38.04.05 «Бизнес-информатика».

Данное издание является переработанным и дополненным изданием учебно-методических пособий [26] и [27].

Глава 1. Одномерные отображения[1]

1.1. Основные определения и теоремы

Если говорить очень упрощенно, то под динамической системой понимается любая система, которая наблюдается во времени. В зависимости от того, как задается время, различают динамические системы с непрерывным временем (потоки) и динамические системы с дискретным временем (каскады). Первые часто моделируются с помощью дифференциальных уравнений, вторые – с помощью разностных уравнений.

В данном пособии мы будем рассматривать простейший вариант каскадов – одномерные каскады. Пусть имеются интервалы $I \subset \mathbf{R}$, $J \subset \mathbf{R}$ (в частности, возможно, что $I = \mathbf{R}$, $J = \mathbf{R}$). Рассмотрим отображение $f : I \to J$, где f – однозначная и непрерывная функция, дифференцируемая столько раз, сколько это необходимо. Если предположить, что каждое последующее воздействие функцией f происходит через единицу времени, то получим динамическую систему с дискретным временем (каскад), заданную на прямой. Иногда воздействие функцией f на точку x называют итерацией, а саму динамическую систему записывают в виде

$$x_n = f(x_{n-1}) \text{ или } \bar{x} = f(x) \qquad (1.1)$$

и кратко называют отображением f. Отметим, что $\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n \text{ раз}} = f^n(x)$.

Графически динамику отображения (1.1) удобно изображать на диаграмме Кёнигса-Ламерея, которая представляет собой двумерную декартову систему координат, дополненную биссектрисой первого квадранта (см. рис. 1.1). В системе координат строится график функции f. С помощью такой диаграммы удобно точно находить образы точек при отображении (1.1) на горизонтальной прямой $\mathbf{R}$; наглядно проявляется связь между свойствами функции f и динамикой отображения (1.1). Так, изучая динамику отображения f на рис.1.1, можно заметить следующие особенности.

1°. На прямой $\mathbf{R}$ имеются три точки p_1, p_2, p_3, каждая из которых при отображении f переходит в себя.

2°. При последующих итерациях точка x_0 «перемещается» из окрестности точки p_2 в окрестность точки p_3; точка x_0^* «перемещается» из окрестности точки p_2 в окрестность точки p_1.

[1] Глава написана на основе пособия [26].

О п р е д е л е н и е 1. Точка $p \in \mathbf{R}$ такая, что $p = f(p)$, называется *неподвижной точкой* (*точкой покоя, состоянием равновесия*) отображения f (динамической системы $\bar{x} = f(x)$).

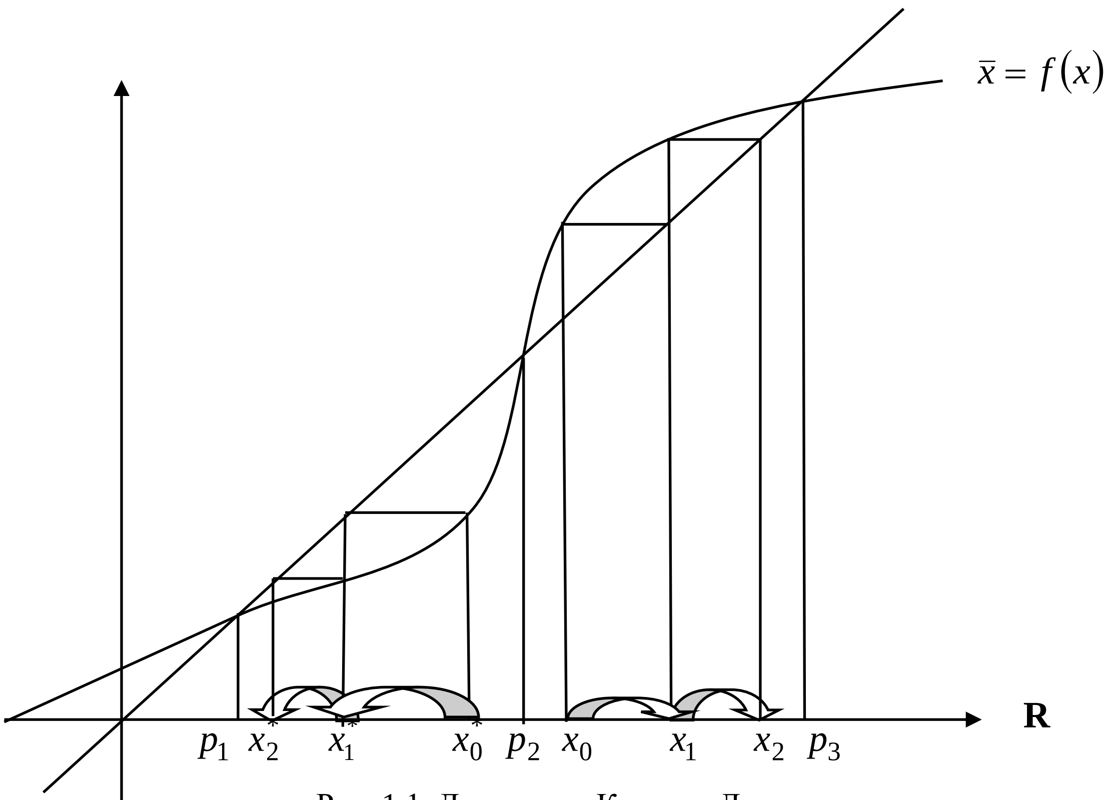


Рис. 1.1. Диаграмма Кенигса-Ламерея

О п р е д е л е н и е 2. Неподвижная точка p называется (*неподвижным*) *стоком* (*притягивающей точкой*) динамической системы (1.1), если $\forall x \neq p$, $x \in V(p)$, где $V(p)$ – некоторая окрестность точки p, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbf{N}$: $\forall n > n_0$ $f^n(x) \in U_\varepsilon(p) \subset V(p)$, где $U_\varepsilon(p)$ – ε-окрестность точки p.

Таким образом, точки p_1 и p_3 являются стоками динамической системы, изображённой на рис.1.1.

Прежде чем дать определение точки, обладающей свойствами точки p_2 на рис.1, рассмотрим важный частный случай отображения f.

Пусть функция f, задающая отображение (1.1), обратима, т.е. существует обратная к ней однозначная функция f^{-1}, и пусть f^{-1} - непрерывная функция. Тогда отображение (1.1) называется гомеоморфизмом прямой $\mathbf{R}$ на себя. В случае, когда функции f и f^{-1} дифференцируемы, говорят о диффеоморфизме f. Очевидно, что диффеоморфизм является гомеоморфизмом.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть f – гомеоморфизм. Неподвижная точка p называется *источником* (*отталкивающей точкой*) гомеоморфизма (1), если она является стоком динамической системы

$$x_{n-1} = f^{-1}(x_n), \tag{1.2}$$
то есть если $\forall x \neq p$, $x \in V(p)$, где $V(p)$ – некоторая окрестность точки p, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}$: $\forall n > n_0\ f^{-n}(x) \in U_\varepsilon(p) \subset V(p)$, где $U_\varepsilon(p)$ – ε-окрестность точки p, а $f^{-n}(x) = \underbrace{f^{-1}(f^{-1}(\ldots f^{-1}(x)))}_{n\ \textbf{раз}}$.

З а м е ч а н и е. Если функция f необратима, понятие источника также вводится. Определение в этом случае выглядит несколько сложнее, см., например, [1].

3°. Вновь вернёмся к рисунку 1. Нетрудно заметить, что касательная к графику функции $f(x)$ в точках, абсциссы которых совпадают с неподвижными точками, образует с положительным направлением горизонтальной оси угол меньше, чем $\frac{\pi}{4}$, а в источнике – угол больше, чем $\frac{\pi}{4}$. Это наблюдение позволяет выдвинуть предположение о том, что верным будет следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. Пусть $p \in \mathbf{R}$ – неподвижная точка динамической системы (1.1). Тогда, если $|f'(p)| < 1$, то неподвижная точка p - сток; если $|f'(p)| > 1$, то неподвижная точка p - источник.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $|f'(p)| < 1$, тогда $\exists \lambda \in (0, 1)$: $\forall x \in U_\varepsilon(p)$ $|f'(x)| \leq \lambda$, где ε – достаточно малое положительное число. Тогда в силу теоремы Лагранжа о среднем значении между точками x и p найдётся точка z, так что будет верна следующая цепочка рассуждений:
$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| = |f'(z)||x - p| \leq \lambda|x - p| < |x - p|.$$
Отметим два наиболее существенных вывода, которые необходимо сделать из проведённых выкладок: во-первых,
$$|f(x) - p| \leq \lambda|x - p|; \tag{1.3}$$
во-вторых,
$$|f(x) - p| < |x - p|. \tag{1.4}$$

Рассмотрим вторую итерацию точки x. В силу правила дифференцирования сложной функции имеем:
$$|f^2(x) - p| = |f^2(x) - f^2(p)| = |(f^2(z))'||x - p| = |(f(f(z)))'||x - p| =$$
$$= |f'(z_1)||f'(z)||x - p| \leq \lambda^2|x - p|,$$
где $z_1 = f(z)$. Последнее неравенство следует из (1.4). В самом деле, так как $z \in U_\varepsilon(p)$, то в силу (1.4) $|f(z) - p| < |z - p|$, следовательно, $z_1 \in U_\varepsilon(p)$ и $|f'(z_1)||x - p| \leq \lambda|x - p|$ (в силу (1.3)).

Итак, в дополнение к соотношению (1.3) имеем соотношение

$$\left| f^2(x) - p \right| \le \lambda^2 |x - p|.$$

В силу принципа математической индукции легко установить, что для произвольного $n \in \mathbf{N}$ будет выполнено соотношение

$$\left| f^n(x) - p \right| \le \lambda^n |x - p|. \tag{1.5}$$

Но в силу (1.5) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| f^n(x) - p \right| \le \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda^n |x - p| = 0$, так как $\lambda \in (0, 1)$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| f^n(x) - p \right| = 0$. Последнее означает, что $f^n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} p$, и точка p – сток. Случай, когда $|f'(p)| > 1$, для случая, когда f – диффеоморфизм, доказывается аналогично. В случае, когда f необратима, теорема доказывается несколько сложнее, см., например, [1].

Неподвижным точкам в реальности соответствуют состояния, когда система находится в равновесии и движение отсутствует. В экономике это, например, ситуация, когда национальный доход некоторой страны из года в год остаётся неизменным.

В случае наличия цикличности тех или иных процессов состояниям реальных систем соответствуют периодические точки каскадов.

О п р е д е л е н и е 4. Точка $p \in \mathbf{R}$ динамической системы (1.1) называется *периодической периода n*, если $f^n(p) = p$, но $\forall m = 1, 2, \ldots, n-1$ $f^m(p) \ne p$. Число n в этом случае называется *периодом* (*наименьшим периодом*) точки p.

О п р е д е л е н и е 5. Периодическая точка p периода n динамической системы (1.1) называется *периодическим стоком*, если точка p является неподвижным стоком для отображения $\bar{x} = f^n(x)$. Периодическая точка p периода n динамической системы (1.1) называется *периодическим источником*, если точка p является неподвижным источником для отображения $\bar{x} = f^n(x)$.

Теорема 1 может быть обобщена на случай периодических точек.

Т е о р е м а 2. Пусть точка $p \in \mathbf{R}$ – периодическая точка периода n системы (1.1), такая, что $\left| (f^n(p))' \right| < 1$ $\left(\left| (f^n(p))' \right| > 1 \right)$. Тогда точка p – сток (источник) системы (1.1).

Доказательство теоремы 2 предлагается провести в качестве упражнения.

Периодическим точкам в реальности соответствуют периодические процессы. В качестве экономического примера можно рассмотреть циклы деловой активности.

Важными понятиями теории динамических систем являются устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость.

О п р е д е л е н и е 6. Точка $a \in \mathbf{R}$ называется *устойчивой по Ляпунову* (L-*устойчивой*) при отображении $f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $|x - a| < \delta \Rightarrow \left| f^j(x) - f^j(a) \right| < \varepsilon$ $\forall j \ge 0$. Точка $a \in \mathbf{R}$ называется *асимптотиче-*

ски устойчивой при отображении $f(x)$, если, помимо перечисленного, $\left|f^j(x)-f^j(a)\right|\to 0$ при $j\to+\infty$. Точка $a\in\mathbf{R}$ называется неустойчивой при отображении $f(x)$, если $\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists j\in\mathbf{N}:\ |x-a|<\delta\Rightarrow\left|f^j(x)-f^j(a)\right|>\varepsilon$.

З а м е ч а н и е. Если p – сток (периодический или неподвижный), то p асимптотически устойчива. Если p – источник (периодический или неподвижный), то p неустойчива. Очевидно также, что асимптотически устойчивая периодическая или неподвижная точка является стоком, а неустойчивая периодическая или неподвижная точка – источником.

В качестве упражнения предлагается переформулировать определения устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и неустойчивости для случая, когда точка *a* является неподвижной точкой.

Пусть задана системы (1.1). Назовём прообразом точки *y* множество $f^{-1}(y)=\{x:\ f(x)=y\}$.

О п р е д е л е н и е 7. Назовём *положительной полуорбитой* (*положительной полутраекторией*) точки a множество $O^+(a)=\left\{f^k(a):\ k=0,1,2,\ldots\right\}$. Назовём *отрицательной полуорбитой* (*отрицательной полутраекторией*) точки *a* множество $O^-(a)=\left\{f^{-k}(a):\ k\in 0,1,2,\ldots\right\}$. *Орбитой* (*траекторией*) точки *a* назовём множество $O(a)=\left\{f^k(a):\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

З а м е ч а н и е. Необходимо понимать, что орбита периодической точки p периода *n* есть совокупность точек $\left\{p,\ f(p),\ f^2(p),\ldots,\ f^{n-1}(p)\right\}$. Орбита неподвижной точки состоит в точности из этой точки.

О п р е д е л е н и е 8. *Притягивающим множеством* точки a $W^s(a)$ назовём множество точек q таких, что $\left|f^j(q)-f^j(a)\right|\underset{j\to+\infty}{\to}0$.

В качестве упражнения можно переформулировать определение для случая, когда p – неподвижная точка.

О п р е д е л е н и е 9. *Отталкивающим множеством* точки a $W^u(a)$ назовём множество точек q таких, что $\left|f^{-j}(q)-f^{-j}(a)\right|\underset{j\to+\infty}{\to}0$.

О п р е д е л е н и е 10. Точка $y\in\mathbf{R}$ называется ω-*предельной точкой* точки $x\in\mathbf{R}$ для отображения (1.1), если существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty}n_k=+\infty$ и $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|f^{n_k}(x)-y\right|=0$. Множество всех ω-предельных точек точки $x\in\mathbf{R}$ для отображения (1) называется ω-предельным множеством точки x и обозначается $\omega(x)$ или $\omega(x,f)$.

О п р е д е л е н и е 11. Точка $y\in\mathbf{R}$ называется α-*предельной точкой* точки $x\in\mathbf{R}$ для отображения (1), если существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty}n_k=+\infty$ и $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|f^{-n_k}(x)-y\right|=0$. Множество всех α-предельных точек точки $x \in \mathbf{R}$ для отображения (1.1) называется α-предельным множеством точки x и обозначается $\alpha(x)$ или $\alpha(x, f)$.

Неподвижный сток p является ω-предельным множеством для точек из $W^s(p)$. Неподвижный сток q является α-предельным множеством для точек из $W^u(q)$.

Определение 12. Множество $S \subset \mathbf{R}$ называется *положительно инвариантным*, если $\forall x \in S \quad f(x) \in S$, то есть $f(S) \subset S$. Множество $S \subset \mathbf{R}$ называется *инвариантным*, если $f(S) = S$. В случае, когда f – гомеоморфизм, множество $S \subset \mathbf{R}$ называется *отрицательно инвариантным*, если $\forall x \in S$ $f^{-1}(x) \in S$, то есть $f^{-1}(S) \subset S$.

Тривиальным примером инвариантного множества служит орбита точки.

1.2. Логистическое отображение

Логистическим иногда называют квадратичное отображение

$$\bar{x} = F_\mu(x) = \mu \cdot x(1 - x), \tag{1.6}$$

где $\mu > 0$ – параметр. Одной из первых работ, в которой рассматривалась динамика отображения (6), является [2]. Подробно отображение (1.6) изучено во многих источниках, например, в [1]. Отображение (1.6) интересно тем, что при кажущейся простоте оно предъявляет чрезвычайно сложное поведение. Кроме того, (6) часто используется в качестве модели различных явлений экономической динамики.

1°. Чтобы найти неподвижные точки отображения (1.6), достаточно решить уравнение $x = \mu \cdot x(1 - x)$. Это будут точки $p_0 = 0$ и $p_\mu = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$.

2°. С помощью теоремы 1 легко проверяется характер неподвижных точек. А именно, $f' = \mu - 2\mu x$; $f'(0) = \mu$; $f'\left(\dfrac{\mu - 1}{\mu}\right) = 2 - \mu$. Таким образом, точка $p_0 = 0$ будет стоком при $\mu < 1$, источником при $\mu > 1$; точка $p_\mu = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$ будет стоком при $\mu \in (1, 3)$; источником при $\mu < 1$ или при $\mu > 3$.

3°. Изучим вопрос о наличии у отображения (1.6) периодических точек периода 2. Для этого решим уравнение $F_\mu^2(x) = x$, т.е. уравнение $x = \mu(\mu x(1 - x))(1 - (\mu x(1 - x)))$. Помимо значений $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{\mu - 1}{\mu}$, решением этого уравнения будут $x_{3,4} = \dfrac{\mu + 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}}{2\mu}$. Именно последние две точки являются периодическими точками периода 2 для отображения (1.6); очевидно, что они появляются только при $\mu > 3$.

4°. Сравнительно легко (см. [1]) проверяется справедливость следующих утверждений.

Теорема 3. Пусть $\mu > 1$. Тогда если $x \notin [0, 1]$, то $F_\mu^j(x) \xrightarrow[j\to+\infty]{} -\infty$.

Теорема 4. Пусть $1 < \mu < 3$. Тогда если $x \in (0, 1)$, то $F_\mu^j(x)$ стремится к p_μ, как только $j \to \infty$. Таким образом $W^S(p_\mu) = (0;1)$.

Упражнение. Изобразите диаграмму Кёнигса-Ламерея для логистического отображения при $\mu = \frac{1}{2}$, $\mu = 2$, $\mu = 3{,}1$. Убедитесь в правильности сделанных выводов.

1.3. Инвариантные множества одномерных отображений

Определение 13. Порядком Шарковского называется следующее расположение натуральных чисел:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \ldots \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd 2\cdot 7 \rhd \ldots \rhd 2^2\cdot 3 \rhd 2^2\cdot 5 \rhd 2^2\cdot 7 \rhd \ldots \rhd 2^n\cdot 3 \rhd 2^n\cdot 5 \rhd$$

$$\rhd 2^n\cdot 7 \rhd \ldots \rhd 2^n \rhd 2^{n-1} \rhd \ldots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.$$

Запись $a \rhd b$ означает, что число b является следующим после числа a в порядке Шарковского.

Замечание. Некоторые источники в качестве порядка Шарковского указывают расположение натуральных чисел, обратное рассмотренному.

Теорема 5 (Шарковский, 1964). Пусть функция $f : I \to \mathbf{R}$, $I \subset \mathbf{R}$ есть непрерывная функция на интервале I. Пусть отображение f имеет периодическую точку a периода n и $n \rhd k$. Тогда f имеет периодическую точку периода k.

Пусть I, J - интервалы вещественной оси. В частности, из теоремы Шарковского вытекают следующие важные факты.

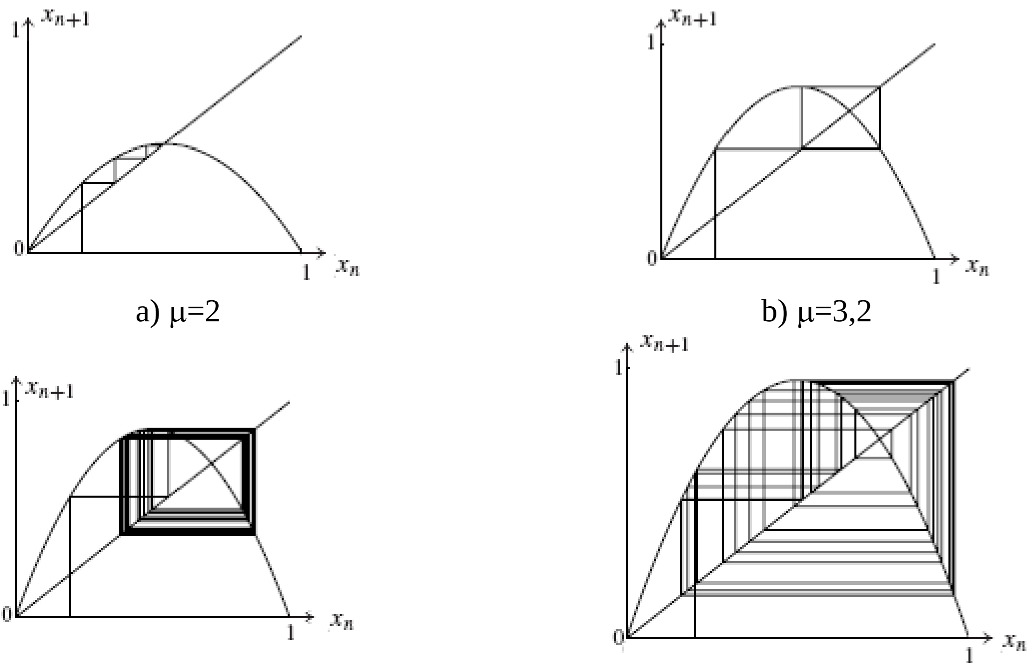
1. Если отображение $f : I \to J$ имеет конечное число периодических орбит, то их периоды обязаны быть степенями числа 2.

2. Если отображение $f : I \to J$ имеет орбиту периода 3, то оно имеет орбиты всех периодов.

На вопрос о том, в каком случае одномерное отображение имеет орбиту периода три, а, следовательно, и орбиты всех других периодов, в какой-то степени отвечает

Теорема 6 (Ли, Йорке, 1975). Пусть $f : I \to J$, где I, J - интервалы вещественной оси, непрерывна и существует такая точка a, что выполняется либо $f^3(a) \le a < f(a) < f^2(a)$, либо $f^3(a) \ge a > f(a) > f^2(a)$. Тогда f имеет орбиту периода 3.

Рассмотрим логистическое отображение (1.6): $\bar{x} = F_\mu(x) = \mu \cdot x(1-x)$. Выше было показано, что при значении параметра $\mu = 3$ при возрастании μ у отображения (1.6) появляется орбита периода 2, при этом неподвижная точка p_μ превращается из устойчивой в неустойчивую. Можно показать, что при дальнейшем возрастании μ при переходе через точку $\mu = 1+\sqrt{6}$ орбита периода 2 теряет устойчивость, и появляется («рождается») устойчивая орбита периода 4. При дальнейшем увеличении параметра μ процесс нарастает лавинообразно; при переходе через значение $\mu_\infty \approx 3{,}5699456$ логистическое отображение имеет уже бесконечное число периодических орбит и демонстрирует чрезвычайно сложное поведение (см. рис.1.2). Орбита периода 3 обнаруживается в окрестности значения $\mu = 3{,}83$. Можно показать также, что отображение $F_\mu(x)$ при переходе через значение параметра $\mu = 4$ приобретает инвариантное канторовское множество. Последнее понятие рассмотрим подробнее.



a) μ=2 b) μ=3,2

c) μ=3,5 d) μ=3,8

Рис. 1.2. Диаграмма Кёнигса-Ламерея для логистического отображения при различных значениях параметра μ

О п р е д е л е н и е 1 4 . Множество A *нигде не плотно*, если $\operatorname{int} A = \varnothing$, т.е. множество A не содержит своих внутренних точек (можно также сказать, что замыкание множества A ($\mathrm{cl} A$) не содержит открытого множества).

Так, например, множество натуральных чисел нигде не плотно в множестве действительных чисел.

О п р е д е л е н и е 1 5 . Множество A *нигде не связно*, если его связные компоненты суть отдельные точки.

О п р е д е л е н и е 1 6 . Множество A *совершенно*, если: 1) оно замкнуто, то есть $\mathrm{cl} A = A$; 2) в любой окрестности произвольно заданной точки множества A содержатся точки множества A, отличные от заданной точки ($\forall\ p \in A$ $\exists\ q_n \in A, q_n \neq p : p$-предельная точка q_n).

Замечание. На множестве $\mathbf{R}$ утверждение о том, что множество S нигде не плотно, равносильно утверждению о том, что множество S нигде несвязно (состоит из отдельных точек). (Сравните: на множестве $\mathbf{R}^2$ нигде не плотное множество может состоять из отдельных кривых и не является нигде не связным.)

Определение 17. Система множеств $\{M_\alpha\}$ называется *покрытием множества* X, если $\bigcup\limits_\alpha M_\alpha \supset X$. Если множеств в системе $\{M_\alpha\}$ конечное число, то $\{M_\alpha\}$ называется *конечным покрытием множества* X. Если некоторая часть $\{M_{\alpha_i}\}$ покрытия $\{M_\alpha\}$ сама образует покрытие множества X, то $\{M_{\alpha_i}\}$ называется *подпокрытием* покрытия $\{M_\alpha\}$.

Определение 18. Множество S называется компактным, если из любого его покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Определение 19. Множество S называется *канторовским множеством*, если оно: 1) нигде не связно; 2) совершенно; 3) компактно.

Построение канторовского множества. Пусть $\alpha \in (0;1)$, $\beta > 0$ и $\alpha + 2\beta = 1$; следовательно, $\beta = \dfrac{1-\alpha}{2}$; т.е. $\beta \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. Пусть $S_0 = I = [0;1]$. Выбросим из середины отрезка открытый интервал длиной α, т.е. интервал $G = (\beta, 1-\beta)$ и рассмотрим $S_1 = I \setminus G = J_0 \bigcup J_2$ - объединение двух замкнутых отрезков, длина $L(J_j) = \beta$ $\forall j = 0;2$. Пусть интервал J_0 располагается левее интервала J_2 $j = 0;2$ и G_0 и G_2 - открытые интервалы длиной $\alpha\beta$, расположенные, соответственно, в середине каждого из этих промежутков; J_{j0} - левая компонента множества $J_j \setminus G_j$, и J_{j2} - правая компонента множества $J_j \setminus G_j$, $j = 0;2$. Заметим, что длина интервала $J_{j_1 j_2}$ равна $\dfrac{\beta - \alpha\beta}{2} = \dfrac{\beta(1-\alpha)}{2} = \beta^2$ ($j_0, j_2 = 0;2$). Через G_{j_1, j_2} обозначим открытый интервал длиной $\alpha\beta^2$, убираемый из середины каждого интервала J_{j_1, j_2}. На третьем шаге рассмотрим интервал J_{j_1, j_2, j_3} длиной $\dfrac{\beta^2 - \alpha\beta^2}{2} = \dfrac{\beta^2(1-\alpha)}{2} = \beta^3$, и произведём аналогичные действия. На n-ом шаге имеем: S_{n-1} есть объединение 2^{n-1} замкнутых интервалов $J_{j_1, \ldots, j_{n-1}}$ (для всех комбинаций $j_k = 0,2$), любой из которых имеет длину β^{n-1}. Любой из интервалов $G_{j_1, \ldots, j_{n-1}}$, есть средний открытый интервал, делящий $J_{j_1, \ldots, j_{n-1}}$. Длина интервала $G_{j_1, \ldots, j_{n-1}}$ равна $\alpha = \alpha\beta^{n-1}$. Пусть

$J_{j_1,\dots,j_{n-1}} \setminus G_{j_1,\dots,j_{n-1}} = J_{j_1,\dots,j_{n-1},0} \bigcup J_{j_1,\dots,j_{n-1},2}$, где $J_{j_1,\dots,j_{n-1},0}$ находится левее $J_{j_1,\dots,j_{n-1},2}$. Каждая из этих компонент имеет длину β^n. Пусть $S_n = S_{n-1} \setminus \bigcup\limits_{j_1,\dots,j_{n-1}=0;2} G_{j_1,\dots,j_{n-1}} = \bigcup\limits_{j_1,\dots,j_n=0;2} J_{j_1,\dots,j_n}$. Так как любой интервал $J_{j_1,\dots,j_{n-1}}$ из S_{n-1} порождает два замкнутых интервала S_n, то S_n имеет $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ замкнутых интервалов.

Наконец, рассмотрим $C = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} S_n$. Покажем, что C удовлетворяет условиям канторовского множества.

1. Множество C нигде не плотно, а также нигде не связно. В самом деле, интервалы, содержащиеся в S_n, имеют длину β^n. Следовательно, для любой точки $p \in C$, для любой окрестности $U(p)$ точки p найдётся точка $q \in U(p)$, $q \neq p$ такая, что для некоторого $n \in \mathbf{N}$ $q \notin S_n$, то есть $q \notin C$. Следовательно, p не является внутренней точкой множества C и, в силу произвольности выбора точки p, $\operatorname{int} C = \varnothing$.

2. Множество C совершенно. В самом деле, все множества S_n замкнуты, множество C есть пересечение этих множеств, следовательно, C замкнуто.

Пусть $p \in C$ и $j \in N$. Возьмем n такое, что $\beta^n < 2^{-j}$ и пусть K есть компонента S_n, содержащая p. Следовательно, $K \bigcap S_{n+1}$ состоит из двух интервалов. Пусть q_j есть одна из конечных точек интервала из $K \bigcap S_{n+1}$, не содержащего p. Тогда: 1) $q_j \neq p$; 2) $\left| p - q_j \right| \leq \beta^n < 2^{-j}$; 3) $q_j \in C$ (так как все граничные точки S_n содержатся в C). Это дает последовательность точек $q_j \in C$, $q_j \neq p$, $q_j \to p$.

3. Множество C компактно (доказать в качестве упражнения).

З а м е ч а н и е . Так как $2\beta < 1$, то $L(S_n) = (2\beta)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = L(C)$, где $L(\bullet)$ - мера множества $\bullet$ (в случае S_n равная сумме длин интервалов, входящих в S_n). Следовательно, все построенное канторовское множество имеет меру нуль. (Заметим, что не все канторовские множества имеют меру нуль.)

Рассматривая логистическое отображение $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ при $\mu > 4$, видим, что прообразом отрезка $I = [0;1]$ является объединение двух равных отрезков $[0,\theta] \cup [1-\theta,1]$; прообразом этого объединения является объединение четырёх отрезков и т.д. (на каждом шаге «выбрасывается» «середина»). Можно показать, что пересечение получаемых отрезков при $n = 0,-1,-2,\dots$ есть канторовское множество Λ_μ того же типа, что и C, которое будет инвариантным для рассматриваемого отображения.

1.4. Хаотические отображения

Пусть $I,\ J$ - интервалы вещественной оси,

Определение 20. Отображение $f:I\to J$ называется *(топологически) транзитивным* на инвариантном множестве Y, если положительная полуорбита $O^{+}(p)$ некоторой точки p плотна на Y (то есть дополнение множества $O^{+}(p)$ до множества Y является нигде не плотным). Свойство транзитивности означает, что инвариантное множество Y не может быть разбито на два замкнутых непересекающихся инвариантных множества.

Отметим, что Биркгоф доказал, что отображение f является транзитивным на Y тогда и только тогда, когда для любых двух открытых множеств U и V на Y существует натуральное n такое, что $f^{n}(U)\cap V\neq\varnothing$. Часто именно эту формулировку используют в качестве определения транзитивности. Также условие транзитивности иногда называют условием перемешивания.

Определение 21. Отображение $f:I\to J$ называется *имеющим существенную (чувствительную) зависимость от начальных условий*, если существует $r>0$ (независимое от точки) такое, что для $\forall x\in I$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists\, y\in I$ и $\exists k\geq 0$: $|x-y|<\varepsilon$ и $\left|f^{k}(x)-f^{k}(y)\right|\geq r$.

Определение 22. Отображение $f:I\to J$ называется *расширяющимся*, если $\exists\, r>0$ такое, что для любой пары точек $x,y\in I$ $\exists\ k\geq 0$: $\left|f^{k}(x)-f^{k}(y)\right|\geq r$.

Отметим, что любое расширяющееся отображение прямой имеет чувствительную зависимость от начальных условий.

Определение 23. Отображение $f:I\to J$ называется *демонстрирующим хаос* на инвариантном множестве Y если:

1) f транзитивно на Y;
2) f имеет существенную зависимость от начальных условий на Y.

Замечание. Некоторые авторы (Devaney,1989) к двум условиям определения хаотического отображения добавляют условие плотности периодических точек отображения f на инвариантном множестве Y. Однако в 1992 году Banks, Brooks, Cairns, Davis, Stacey показали, что любое транзитивное отображение, множество периодических точек которого плотно, обязано иметь существенную зависимость от начальных условий. С точки зрения динамики более разумен тот выбор условий для хаотического отображения, которые имеются в определении 23.

Можно дать следующее определение хаотического инвариантного множества.

Определение 24. Множество Y называется хаотическим инвариантным множеством отображения f, если f транзитивно на Y и f демонстрирует существенную зависимость от начальных условий на Y.

Рассмотрим отображение F_μ для $\mu > 4$ на инвариантном множестве Λ_μ. 1) Можно показать транзитивность упомянутого отображения на инвариантном множестве Λ_μ. 2) Можно показать, что множество периодических точек отображения F_μ всюду плотно на инвариантном множестве Λ_μ. Таким образом, F_μ демонстрирует существенную зависимость от начальных данных. Следовательно, F_μ демонстрирует хаос на инвариантном множестве Λ_μ.

Замечание. Многие исследователи отмечают признаки хаоса у логистического отображения уже при $\mu_\infty < \mu < 4$ на отрезке $[0, 1]$, являющимся положительно инвариантным множеством для отображения (6).

Глава 2. Моделирование экономической динамики в случае дискретного времени[2]

В данной главе будут рассмотрены модели процессов в экономике в условиях, когда для дискретного времени динамика зависит от изменения одного из показателей.

2.1. Модель динамики капитала с учётом загрязнения окружающей среды[3]

Пусть y_t – выпуск продукции на душу населения в период t и k_t – капиталовооруженность в период t. Их связь описывается при помощи неоклассической производственной функции f:

$$y_t = f(k_t). \tag{2.1}$$

Пусть c_t – потребление, а разница между выпуском продукции и потреблением – инвестиции i_t:

$$i_t = y_t - c_t.$$

Предполагается, что объём инвестиций пропорционален произведённой продукции, то есть:

$$i_t = y_t \cdot \theta, \quad \theta > 0. \tag{2.2}$$

Пусть d_t - амортизационные потери основных фондов в момент времени t. Тогда в силу (2.1) и (2.2) динамика основных фондов будет описываться уравнением

$$k_t = k_{t-1} + \theta \cdot f(k_{t-1}) - d_t. \tag{2.3}$$

Для упрощения анализа предполагается, что амортизационные потери в точности равны основным фондам предыдущего периода.

$$k_{t-1} = d_t. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3) получим уравнение динамики капитала:

$$k_t = \theta \cdot f(k_{t-1}). \tag{2.5}$$

Пусть в идеальном случае (загрязнение окружающей среды отсутствует) функция $f(k)$ является производственной функцией Кобба-Дугласа

$$f(k) = A \cdot k^{\alpha},$$

где $A > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Р. Дей предположил, что при росте производства загрязнение окружающей среды становится столь велико, что доходы полностью тратятся на устранение причиненного вреда. Пусть эта ситуация возникает при определённом значении капиталовооружённости $k = k^* > 0$. Описанным условиям удовлетворяет, например, функция $f(k)$ вида

[2] Глава написана на основе пособия [26].

[3] R. Day, 1982, см. [3] и [4].

$$f(k) = Ak^{\alpha}(k^{*} - k)^{\gamma}, \tag{2.6}$$

где $\alpha > 0$, $\gamma > 0$.

Подставляя (2.6) в (2.5), получаем уравнение:

$$k_t = \theta \cdot Ak_{t-1}^{\alpha}(k^{*} - k_{t-1})^{\gamma}. \tag{2.7}$$

Предполагается, что параметры $\theta, A, \alpha, \gamma, k^{*}$ таковы, что функция (2.6) отображает интервал $(0; k^{*})$ на подмножество интервала $(0; k^{*})$.

Рассматривая динамику системы (2.7) при определённых значениях некоторых параметров, а именно при $\alpha = 1$; $k^{*} = 1$; $\gamma = 1$; $\theta \cdot A = \mu$ (μ>0) получим логистическое уравнение $k_t = \mu \cdot k_{t-1}(1 - k_{t-1})$.

2.2. Исследование рационального выбора потребителя при условии цикличности предпочтений[4]

В представляемой модели проанализирована процедура потребительского выбора с учетом эндогенного изменения предпочтений. Исследование поведения потребителя в случае, когда предпочтения зависят от опыта, авторы сводят к изучению свойств отображения, описывающего непосредственно сам выбор.

Рассмотрим конкретный пример индивидуального выбора. Пусть функция полезности задана в виде

$$u(x, y; a) = x^{a} \cdot y^{1-a},$$

где x и y - количество потребляемых товаров без учета временного периода, a - коэффициент, отражающий степень предпочтения товара, $0 < a < 1$. Максимизируя функцию полезности $u(x, y; a) \to \max$, необходимо учитывать бюджетное ограничение:

$$p \cdot x + q \cdot y = m, \tag{2.8}$$

где p, q – цены товаров x и y, m – бюджет потребителя. Функции спроса описываются следующими уравнениями:

$$x = a \cdot \frac{m}{p}, \quad y = (1 - a) \cdot \frac{m}{q}. \tag{2.9}$$

Зависимость этих функции от предшествующего опыта проявляется в том, что на коэффициент a, отражающий степень предпочтения, влияет значение предыдущего выбора. Пусть $a_{t+1} = g(x_t, y_t; \alpha)$, ($\alpha$ - параметр, зависящий от опыта; чем больше α, тем более предпочтительным является товар x), тогда функции спроса примут вид:

$$x_{t+1} = \frac{m}{p} \cdot g(x_t, y_t; \alpha), \quad y_{t+1} = \frac{m}{q} \cdot (1 - g(x_t, y_t; \alpha)) \tag{2.10}$$

---

[4] Benhabib J., Day R., 1981, см.[5]

Используя формулу для бюджетного ограничения (2.8), исключим из рассмотрения товар y и в силу (2.9) и (2.10) получим:

$$x_{t+1} = C(x_t; \alpha, m, p) = \frac{m}{p} \cdot g\left(x_t, \frac{m - p \cdot x_t}{q}; \alpha \right), \tag{2.11}$$

Для определённости рассмотрим случай, когда функция g имеет вид

$$a_{t+1} = \alpha \cdot x_t \cdot y_t. \tag{2.12}$$

Интерпретируя x как досуг, а y как работу, естественно считать, что переменная m есть суммарное количество времени, затрачиваемое на отдых и работу. Согласно уравнению (2.12) степень предпочтения отдыха в текущем периоде выше, чем в ближайшем будущем.

Из соотношения (2.11) с учетом (2.8) получим функцию спроса на товар x в будущем периоде:

$$x_{t+1} = \alpha \cdot m \cdot x_t (m - x_t). \tag{2.13}$$

Очевидно, уравнение (2.13) при соответствующем изменении масштаба параметров превращается в логистическое уравнение, поэтому качественно динамика отображения (2.13) ничем не отличается от динамики отображения F_μ. Стационарное состояние спроса находится из условия $x_{t+1} = x_t$. Для уравнения (2.13) это неподвижная точка $\bar{x} = \frac{\alpha \cdot m^2 - 1}{\alpha \cdot m}$, которая при $1 < \alpha \cdot m^2 < 3$ является устойчивой. Максимальное значение потребления товара достигается в точке $x^* = \frac{m}{2}$, соответственно $x_{t+1}(x^*) = \frac{\alpha \cdot m^3}{4}$. Если это удовлетворяет бюджетному ограничению, тогда $\alpha \cdot m^2 \le 4$. Следовательно, необходимо рассматривать такие значения m и α, которые удовлетворяют неравенству:

$$1 < \alpha \cdot m^2 \le 4.$$

Авторами модели показано, что при условии $3 < \alpha \cdot m^2 \le 4$ при увеличении $\alpha \cdot m^2$ возникает бифуркация удвоения периода, и при $\alpha \cdot m^2 \approx 3{,}57$ отображение (2.13) обладает циклами всех периодов (в частности, авторами показано, что цикл периода 3 появляется при условии выполнения неравенства $\left(\alpha \cdot m^2\right)^2 (4 - \alpha \cdot m^2) < 8 < 4\alpha \cdot m^2$, а периодические точки периода 3 обладают координатами $\alpha \cdot m^2 (4 - \alpha \cdot m^2)/16$, $m/2$ и $m^2/4$.

2.3. О реализации переходного процесса в случае наличия хаотической динамики цены[5]

Авторами работы [6] рассматривается классическая концепция конкурентного

[5] Bala V., Majumdar M., Mitra T., 1998, см. [6]. Раздел написан при участии А.А. Воробьёва и Д.С. Якимовой, см. [7].

рынка, на котором предложение и спрос фирм и домашних хозяйств на товары зависят от цены и устанавливаются, исходя из их личных интересов. Если спрос и предложение вышли из равновесия, конкуренция вызывает ценовые корректировки, пока не установится равновесие и ясность на рынках. Л. Вальрас описал этот процесс как рыночное «нащупывание» (оригинальный термин tâtonnement), процесс, в котором агент корректирует цены пропорционально избыточному спросу.

Покажем, что при определенных условиях динамика цены становится хаотической, и переходный процесс в классическом виде не осуществляется.

Пусть агент объявляет начальную цену и затем регулирует ее вверх или вниз, основываясь на сообщениях агентов об избыточном спросе. При этом в любой момент времени агент не знает функцию избыточного спроса и индивидуальные характеристики агентов, которые генерируют эти функции избыточного спроса, то есть функции полезности и начальных сбережений агентов. Подобным образом агенты не знают характеристики других агентов или даже закон ценового регулирования, который определяется агентом. Традиционно считается, что наступит момент, когда будет достигнуто равновесие.

Зададим конструкцию детально. Пусть скорость ценового регулирования в «нащупывании» фиксирована. Потребители имеют простые предпочтения леонтьевского типа (для первого потребителя) и квазилинейного типа (для других потребителей). Параметр μ относится к предпочтениям двух потребителей. Будем предполагать, что первый потребитель имеет функцию полезности

$$u^1(x_1, x_2) = \min\{f(x_1), \alpha x_2\},$$

где

$$f(x_1) = \begin{cases} x_1 - x_1^2, \; 0 \le x_1 \le \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{4}, \qquad x_1 > \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

и $\alpha \in [1/3, 1/2]$ – параметр предпочтения; начальные предпочтения потребителей $\omega^1 = (1, 0)$. Тогда функция спроса для x_1 задана следующим образом:

$$x_1 = \begin{cases} \alpha p, \quad 0 \le p \le \dfrac{1}{2\alpha}, \\ \dfrac{1}{2}, \qquad p > \dfrac{1}{2\alpha}, \end{cases} \tag{2.14}$$

где p – цена товара 1. В самом деле, при $p \in \left[0, \dfrac{1}{2\alpha}\right]$ рассмотрим уравнения

$$\alpha x_2 = x_1 - x_1^2, \quad p x_1 + x_2 = p.$$

Подставив x_2, получаем

$$x_1^2 - (\alpha p + 1)x_1 + \alpha p = 0,$$

решения которого αp и 1. Тогда $x_1(p)=\alpha p$ и $x_2(p)=p(1-\alpha p)$ являются решениями уравнения (2.14), когда $p\in\left[0,\frac{1}{2\alpha}\right]$. Отметим также, что $x_1(p)=\alpha p\le\frac{1}{2}$, поэтому

$$f(x_1(p))=x_1-x_1^2(p)$$

и

$$\alpha x_2(p)=f(x_1(p)),\quad px_1(p)+x_2(p)=p.$$

Наконец, для $p>\frac{1}{2\alpha}$ имеем $x_1(p)=\frac{1}{2}$ и $x_2(p)=\frac{1}{4\alpha}$.

Функция полезности второго потребителя в квазилинейной форме:

$$u^2(x_1,x_2)=g(x_1)+x_2,$$

где

$$g(x_1)=\begin{cases}-\beta^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1-x_1)^{\frac{3}{2}}, & 0\le x_1\le 1,\\ 0, & x_1>1,\end{cases} \qquad (2.15)$$

где $\beta\in\left[\frac{3}{2},2\right]$, начальные сбережения $\omega^2=(0,1)$. Потребительский спрос на товар x_1 может быть вычислен по формуле $x_1^2(p)=1-\frac{p^2}{\beta}$. В самом деле, рассмотрим уравнения

$$g'(x_1)=p,\quad px_1+x_2=1. \qquad (2.16)$$

Решение уравнений (2.16) является также решением проблемы максимизации полезности. Для $x\in[0,1]$ имеем $g'(x_1)=-\beta^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(1-x_1)^{\frac{1}{2}}\cdot(-1)=\beta^{\frac{1}{2}}(1-x_1)^{\frac{1}{2}}$.

Подставив $g'(x_1)=p$, получим $x_1^2(p)=1-\frac{p^2}{\beta}$. Для $p\in[0,1]$ ($\beta\ge0$) имеем $x_1^2(p)>0$ и $x_2^2(p)=1-px_1^2(p)=1-p+\frac{p^3}{\beta}$, которое также неотрицательно. Так, для $p\in[0,1]$, $x_1^2(p)=1-\frac{p^2}{\beta}$ и $x_2^2(p)=1-p+\frac{p^3}{\beta}$ решена проблема максимизации двух потребителей; в частности равенство (2.15) при $p\in[0,1]$ имеет место.

Главная идея заключается в том, что с тех пор, как потребитель 1 неизбежно продает товар 1 из его предпочтения может стать возможным увеличение спроса на x_1 с увеличением цены x_1 из-за низкой возможности замещения. Используются предпочтения леонтьевского типа (без фиксированных коэффициентов), имеющие в дальнейшем выгоду в том, что спрос на x_1 фактически линеен по p. Потребитель 2 неизбежно покупает товар 1 и его спрос на x_1 уменьшается в p в обычном случае. При выборе функций полезности используется особый квазилинейный тип и гарантируется, что для малых p это уменьшение происходит с очень маленьким темпом, а для p близких к единице это уменьшение происходит в сравнительно высоком темпе (то есть как квадрат цены). Добавляя двойной эффект и вычитая общий объем предложения 1, из уравнений (2.14) и (2.16) получим избыточный спрос на товар 1 следующим образом:

$$z(p) = \left(1 - \frac{p^2}{\beta} + \alpha p\right) - 1 = \alpha p - \frac{p^2}{\beta}.$$

Переходный процесс по Вальрасу («нащупывание») в дискретном времени имеет вид

$$p_{t+1} = p_t + \theta z(p_t),$$

где p_t - цена товара 1 в момент времени t, $\theta>0$ – параметр, зависящий от рыночного темпа регулирования цены. Необходимо применить эту динамику к параметризованному классу экономики с одним параметром. Рыночный темп регулирования будет фиксирован при $\theta=6$. Относительно параметров предпочтения α и β выбор будет следующим: для любого $\xi \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ устанавливается $\alpha = \xi,\ \beta = \frac{6}{1+6\xi}$. Допустим, что $\alpha \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, $\beta \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Тогда избыточный спрос в экономике ξ будет $z(p) = \xi p - \frac{(1+6\xi)p^2}{6}$. При $\theta=6$ уравнение переходного процесса для экономики ξ будет

$$p_{t+1} = p_t + 6\left(\xi p_t - \frac{(1+6\xi)p^2}{6}\right) = (1+6\xi)p_t(1-p_t)$$

Обозначим $\mu = 1+6\xi$, тогда уравнение динамики переходного процесса будет иметь вид

$$p_{t+1} = \mu p_t(1-p_t),$$

которое есть не что иное, как логистическое уравнение (1.6). Если $\xi \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, то $\mu \in [3, 4]$. Таким образом, при условиях, наложенных на параметры модели, наблюдается хаотическая динамика цены, и нельзя говорить о реализации переходного процесса по Вальрасу, по крайней мере, в классической постановке этой задачи (хотя авторы работы [6] утверждают обратное).

Глава 3. Циклы деловой активности.[6]

3.1. Линейные модели циклов деловой активности.

Первые математические модели бизнес-циклов датируются 30-40 годами. Именно к этому времени относятся соответствующие результаты Калецки (Kalecki M., см. [18]), Калдора (Kaldor N., см. [17]), Самуэльсона (Samuelson P.A., см. [16]). Обратимся к тому комплексу моделей, которые условно называют «модели мультипликатора-акселератора». Толчком к созданию таких моделей послужила деятельность Кейнса. Именно Кейнс в работе [19] дал первое полное описание модели экономики в терминах макроэкономических переменных, таких как доход, потребление, сбережения и инвестиции, подготовив тем самым почву для модели делового цикла Самуэльсона. Модель Самуэльсона, о которой пойдёт речь ниже, учитывает только выполнение условий мультипликатора в сочетании с принципом акселерации, определяющим инвестиции. Идея мультипликатора в кейнсианской экономике реализуется следующим образом. Предположим, что мы имеем начальное увеличение в инвестициях ΔI_0. Это вызовет изменение в начальном доходе $\Delta Y_0 = \Delta I_0$, который порождает дополнительное потребление: сначала $c \cdot \Delta I_0$, далее $c^2 \cdot \Delta I_0$ и т.д. (c – склонность к потреблению). Таким образом, полное увеличение дохода для бесконечного времени составит $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c^i \cdot \Delta I_0$. Этот геометрический ряд (сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии), который сходится к конечной сумме – некоему полному приросту дохода ΔY. Таким образом, $\Delta Y = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c^i \cdot \Delta I_0 = \dfrac{\Delta I}{1-c} = \dfrac{\Delta I}{s}$, где s – склонность к накоплению, а $\dfrac{1}{1-c} = \dfrac{1}{s} = \alpha$ есть инвестиционный мультипликатор. Идеи, связанные с мультипликатором, в тридцатых годах и ранее высказывались многими авторами, соответствующие ссылки имеются в [23].

Принцип акселерации, высказанный в начале двадцатого века (см. библиографию в [23]), формализует тот экономический феномен, когда в ответ на незначительное увеличение потребления (или спроса, или выпуска продукции) величина инвестиций в следующем периоде растет гораздо более значительно. По-видимому, впервые в формальном виде принцип акселерации записал Джон Морис Кларк в 1917 году, а именно, Кларк предположил, что $I_t = \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2})$ (индекс у переменных – временной период), где β – коэффициент «акселерации», или акселератор. Самуэльсон [24] предположил, что величина инвестиций пропорциональна изменению потребления, т.е. $I = \beta \Delta C$. Время в модели Самуэльсона дискретно, доход делится на потребление (C), накопление (S) и

[6] Глава написана на основе статьи [30] и пособия [27].

правительственные расходы g: $Y_t = g_t + I_t + C_t$. Здесь $C_t = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) Y_{t-1} = cY_{t-1}$, $I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) = c\beta Y_{t-1} - c\beta Y_{t-2}$, правительственные расходы принимаются за постоянную величину, $g_t = \iota$. Таким образом, национальный доход переписывается в виде: $Y_t = \iota + c(\beta + 1) Y_{t-1} - c\beta Y_{t-2}$. Математически последнее уравнение есть линейное разностное уравнение второго порядка. Его решением могут быть или сумма двух показательных функций (экспонент), соответствующих либо «взрывному» росту дохода, либо быстрому его спаду; или сумма функций, соответствующих затухающим либо «разрастающимся» колебаниям. Периодическое или «почти периодическое»[7] движение (которое, собственно, обязано быть в модели, иллюстрирующей циклы деловой активности – периодический процесс) данное уравнение иногда допускает только в случае $c = 0$, что в реальности не реализуется.

Развивая идею Самуэльсона, Хикс показал [14], что акселерацию не обязательно привязывать только к изменению потребления, например, её можно связать с общественными издержками и др. По-видимому, Кейнсу принадлежит условие $C_t = C_t^A + c \cdot Y_{t-1}$, где C_t^A - автономное потребление, c - предельная склонность к потреблению, $0 < c < 1$. Условие Кларка Хикс модифицировал, добавив автономные инвестиции: $I_t = I_t^A + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2})$. Рассматривая закрытую экономику без учета правительственных расходов, т.е. $Y_t = C_t + I_t$, и подставляя в это уравнение условия на потребление и инвестиции, получим разностное уравнение второго порядка, аналогичное тому, что получил Самуэльсон, только рассматриваемое не относительно потребления, а относительно дохода: $Y_t = C_t^A + c \cdot Y_{t-1} + I_t^A + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2})$, Обозначив $C_t^A + I_t^A = A_t$ (экзогенная величина автономного спроса), получим окончательно уравнение $Y_t - (c + \beta) Y_{t-1} + \beta \cdot Y_{t-2} = A_t$.

Упражнение. Решить уравнение Хикса в общем виде. Проинтерпретировать результаты.

Аналог линейной модели Самуэльсона-Хикса для непрерывного времени представил Филлипс (см. [20], математическая часть проделана Алленом в [3]), анализ которой можно найти, например, в книгах [9, стр. 77-79] и [15, стр. 69]. Пусть функция потребления имеет вид: $C(t) = cY(t)$. В модели Филлипса предполагается, что сохраняется неизменным отношение между желательным запасом капитала $K^d(t)$ и чистым доходом Y: $K^d(t) = vY(t)$, $\nu > 0$. Предполагается, что фирма изменяет запас капитала, как только он начинает отличаться от желаемого: $I(t) = \xi(K^d(t) - K(t)) = \xi(\nu Y(t) - K(t))$, $\xi > 0$. Коэффициент ξ – коррек-

[7] Траекторию некоторой точки мы условно будем называть почти периодической, если она через некоторые промежутки времени возвращается в окрестность исходной точки. Подробное описание поведения траекторий подобного типа не является задачей данного пособия.

ционный параметр, выражающий скорость реакции инвестирования в ответ на разницу между актуальными и желаемыми запасами капитала. Для дальнейшего нам понадобится производная от инвестиций: $\frac{dI(t)}{dt}=\dot{I}(t)=\xi\left(\nu\dot{Y}(t)-I(t)\right)$. Пусть $A(t)$ есть экзогенно определённый автономный спрос. Тогда полный спрос есть сумма $C(t)+I(t)+A(t)$, а общее предложение есть $Y(t)$, и избыточный спрос в каждый период времени будет задан выражением $C(t)+I(t)+A(t)-Y(t)$. Предположим, что общее предложение меняется линейно относительно избыточного спроса: $\frac{dY(t)}{dt}=\dot{Y}(t)=\zeta\left(C(t)+I(t)+A(t)-Y(t)\right)$, $\zeta>0$, где ζ – коррекционный параметр. Дифференцируя последнее соотношение, с учетом вида функции потребления получим: $\ddot{Y}(t)=\zeta\left(-(1-c)\dot{Y}(t)+\dot{I}(t)+\dot{A}(t)\right)$, или, с учетом выражения для $\dot{I}(t)$,

$$\ddot{Y}(t)=\zeta\left(-(1-c)\dot{Y}(t)+\xi\left(\nu\dot{Y}(t)-\left(\frac{\dot{Y}(t)}{\zeta}+(1-c)Y(t)-A(t)\right)\right)+\dot{A}(t)\right),$$

или

$$\ddot{Y}(t)+\left(\zeta(1-c)+\xi-\zeta\xi\nu\right)\dot{Y}(t)+\zeta\xi(1-c)Y(t)=\zeta\xi A(t)+\zeta\dot{A}(t).$$

Полагая для простоты $\dot{A}(t)=0$, $A(t)\equiv A$, получим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$\ddot{Y}(t)+\left(\zeta(1-c)+\xi-\zeta\xi\nu\right)\dot{Y}(t)+\zeta\xi(1-c)Y(t)=\zeta\xi A.$$

Как и в дискретном случае, решением этого уравнения будет непрерывная функция, представляющая собой в общем случае либо сумму двух экспоненциальных функций, означающую либо рост, либо спад; либо сумму двух периодических функций, умноженную на экспоненциальную функцию, означающую либо затухающие, либо «разрастающиеся» колебания. Периодические движения возможны только в случае, когда коэффициент при $\dot{Y}(t)$ равен нулю, что является структурно неустойчивым случаем и в реальности никогда не достигается.

Известны другие линейные модели циклов деловой активности: уже упомянутая модель Калецки [18], модель Вогта (Vogt W., 1969, см. [25]) и др., более подробную библиографию см. в [11], [15], [28], [29]. Однако их несовершенство (отсутствие траектории, соответствующей периодическому процессу), совсем не искупаемое простотой, было очевидно уже на этапе построения.

3.2. Первые попытки создания нелинейных моделей.

Обратимся сначала к исследованиям Хикса. Понимая недостаточность линейного подхода и стремясь приблизить модель к реальности, Хикс попытался внести изменения в инвестиционную функцию. Поскольку в исходной модели Хикса инвестиции пропорциональны изменению дохода в прошлом периоде, то в случае уменьшения дохода инвестиции становятся отрицательным (происходит деинвестирование, или изъятие капиталовложений). Это означает, что запас капитала уменьшается. Однако капитал не может уменьшаться больше, чем на максимальную величину его амортизации при отсутствии замены изношенного оборудования. Это дает нижнюю границу деинвестирования, которую Хикс назвал полом. В соответствии с этим принцип акселератора преобразовался в соотношение $I_t = \max\{\beta \cdot (Y_{t-1} - Y_{t-2}), -I^f\}$, где I^f определяет абсолютную величину пола деинвестирования. Ясно, что это делает модель нелинейной.

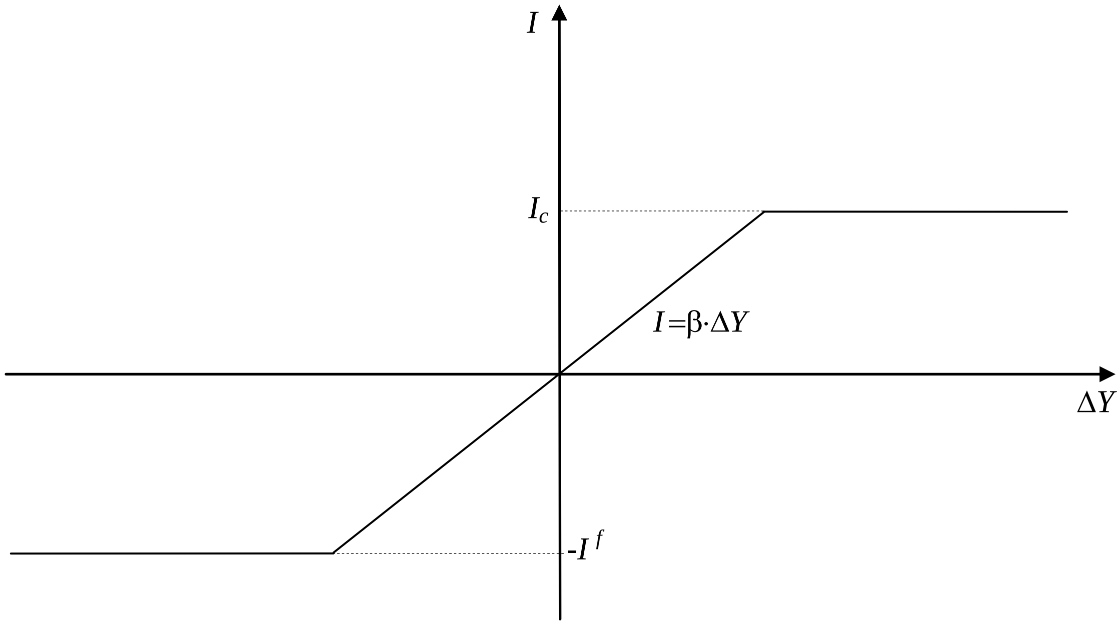


Рис. 3.1. Инвестиционная функция в модели Хикса с полом и потолком

Хикс также ввел верхнюю границу – потолок I^c (вид инвестиционной функции см. на рис. 3.1), но никогда его не интерпретировал и не записывал полную формальную модель с полом и потолком. Потолок Хикса у функции инвестиций можно объяснить различными ограничениями, которые накладываются по тем или иным причинам на факторы производственных функций, используемых в модели. Отметим, что модель Хикса – одна из первых в истории нелинейная модель циклов деловой активности с дискретным временем. Однако особенности инвестиционной функции (кусочно-линейная) и неразвитость математического аппарата в пятидесятых годах двадцатого столетия не позволили провести качественный анализ модели. Только сравнительно недавно этот анализ проведён Пу, Сушко и Гардини (см., например, [21]).

Первыми нелинейными моделями, исследованными полностью, были несколько моделей, предложенных Гудвиным (Goodwin, см. [16]). Рассмотрим простейшую из них. Пусть K – имеющийся в наличии реальный запас капитала, K^d – желательный запас капитала и потребление линейно зависит от выпуска Y: $C = a + bY$. Обозначим чистые инвестиции через I^n, тогда $Y = C + I^n = C + \dot{K}$. Предполагаемый запас капитала пропорционален реальному уровню выпуска: $K^d = kY$, где постоянная k положительна. С течением времени реальный и желательный запасы капитала совпадут, чистые инвестиции станут нулевыми, а валовые инвестиции, I, станут равны постоянной сумме амортизационных отчислений D: $I^n = \dot{K} = I - D$.

Пусть в силу некоторых причин реальные запасы капитала меньше, чем желаемые. Если не существует ограничений для инвестиций, то разрыв между реальным и желаемым запасом капитала должен быть немедленно ликвидирован, т.е. $I^n = K^d - K$. Реальный запас капитала постепенно достигает желательного уровня. Гудвин принимает, что положительные валовые инвестиции ограничены объемом инвестиционных товаров. Пусть объем инвестиционных товаров постоянен в каждый момент времени и равен $\bar{I}$. Это означает, что положительные валовые инвестиции равны $\bar{I}$.

Если желаемый запас капитала меньше реального, то есть если чистые инвестиции отрицательны, валовые инвестиции равны нулю и капитал может только уменьшаться в силу того, что сумма амортизационных отчислений постоянна.

Используя тот факт, что $I^n = \dot{K}$, для чистых инвестиций получаем следующую функцию:

$$I^n = \begin{cases} \bar{I} - D, & K < K^d, \\ 0, & K = K^d, \\ -D, & K > K^d. \end{cases}$$

Тогда желательные запасы капитала как функция, пропорциональная выпуску, будет задаваться следующей функцией:

$$K^d = \begin{cases} \dfrac{ka}{1-b} + \dfrac{k}{1-b}\left(\bar{I} - D\right), & K < K^d, \\ \dfrac{ka}{1-b}, & K = K^d, \\ \dfrac{ka}{1-b} + \dfrac{k}{1-b}\left(-D\right), & K > K^d. \end{cases}$$

Из уравнений очевидно, что инвестиции и капитал меняются циклически, то есть это действительно модель периодического процесса – некий прорыв в моделировании циклов деловой активности.

Отметим, что изученная модель является весьма грубой, особенно в контексте бизнес-циклов, поэтому она рассматривается лишь как пример возможности наличия циклов в классе кусочно-линейных моделей. Другие модели, содержащиеся в работе [16], полученные при различных усложнениях исходных условий, являются более тонкими и с точки зрения полученных уравнений, и с точки зрения адекватности реальности; тем не менее основной недостаток той модели, которая изложена выше – иллюстративность – в них сохраняется. Образно выражаясь, результаты Гудвина показали, что адекватное моделирование периодических процессов в экономической динамике в принципе возможно и дали толчок к дальнейшим исследованиям; по-видимому, для того периода развития как экономики, так и математики, на большее рассчитывать было нельзя.

Помимо моделей Гудвина, весьма известной нелинейной моделью бизнес-циклов является модель Калдора [17]. Калдор предположил наличие взаимодействия между функциями сбережений и инвестиций и исследовал основные требования существования самоподдерживающихся циклов.

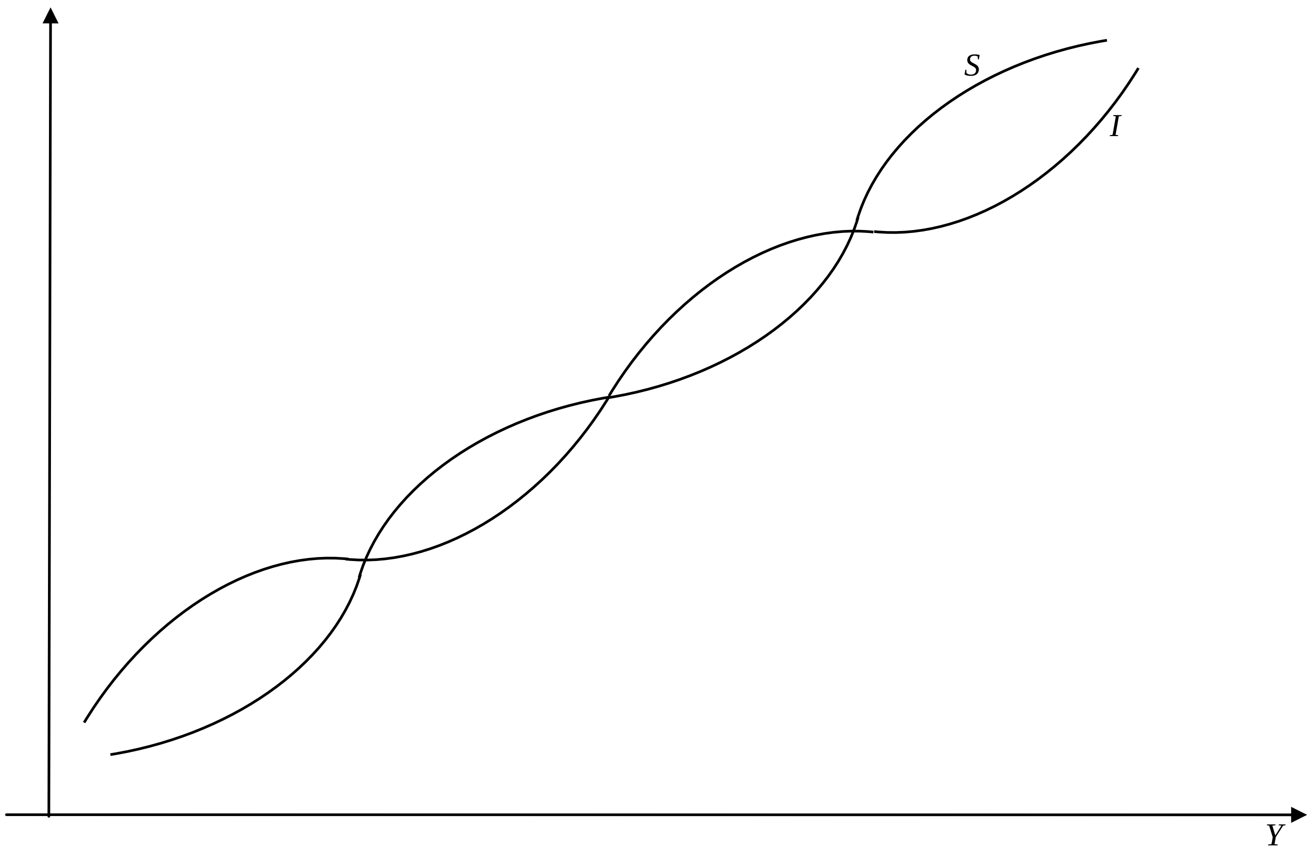


Рис. 3.2. Инвестиционная и сберегающая функции в подели Калдора

Пусть инвестиции есть функция реального дохода, $I = I(Y)$, $\frac{dI}{dY} > 0$. Отметим, что эта функция не связана с принципом акселератора. Инвестиции зависят только от абсолютного значения дохода и не зависят от изменения или отношения изменений реального дохода в прошлом. Пусть имеется кейнсианская функция сбережений такая, что $S = S(Y)$, $\frac{dS}{dY} > 0$. Калдор предположил, что функция инвестиций имеет s-образную форму (сначала скорость изменения инвестиций мала, потом она растёт, потом стремится к нулю. Относительно функции инвестиций функция сбережений «перевернута»: сначала скорость роста сбережений велика, потом уменьшается почти до нуля, потом вновь растёт (см. рис. 3.2). Если такое взаимное поведение функций инвестиций и сбережений циклически повторяется, то перед нами модель, в которой имеется циклическая динамика капитала в зависимости от дохода. В качестве уточнения модели Калдор предполагает, что изменение дохода прямо пропорционально разности инвестиций и сбережений, то есть $\dot{y} = \alpha(I(y) - S(y))$. В общем случае получаем следующее взаимодействие функций $I(y)$ и $S(y)$ (см. рис. 2.2)

Известно много модификаций модели Калдора; среди них – модификация Чанга-Смита [12], приводящая к системе двух автономных дифференциальных уравнений, для которой строго доказано наличие предельного цикла – изолированного периодического движения, соответствующего реальному циклу деловой активности.

3.3. Хаотическая динамика и моделирование циклов деловой активности.

Известно, что в случае непрерывного времени так называемый хаос может присутствовать в не менее, чем трехмерных, динамических системах. Начиная с конца семидесятых годов, различные исследователи, и часто небезуспешно, строили модели бизнес-циклов с непрерывным временем размерности 3. Такие модели можно увидеть, например, в [15, стр. 168], а также в переведённой на русский язык книге [8]; там же можно найти ссылки на другие источники. Однако гораздо более богатые возможности в плане изучения хаотических свойств циклов деловой активности дают модели с дискретным временем – эти системы сложную динамику могут иметь, уже начиная с размерности один (см. главу 1). Очевидно, что чисто внешне зависимость между изменениями дохода и инвестициями возможно представить в виде соответствующим образом подобранной кубической параболы. Идея рассмотрения функции инвестиций в таком виде принадлежит Пу [9, стр. 142], [23], и на его модели мы остановимся подробнее. Подобно Хиксу, заменившему впоследствии линейную зависимость инвестиций от изменений дохода на зависимость с «полом» и «потолком», Пу заменяет её на кубическую: $I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - v(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3$; здесь v – постоянная. Этот шаг разумен, так как полученная в результате функция в некоторой достаточно большой окрестности начала координат слабо отличается от функции, используемой в модели с полом и потолком Хикса, но при этом не является кусочно-линейной, то есть существенно более удобна для исследования. Равенство коэффициентов при обоих слагаемых Пу объясняет установлением соответствующего курса валюты. Далее предполагается, что сбережения хранятся только в течение одного временного периода и в следующем периоде полностью тратятся, то есть потребление в текущем периоде равно сумме потреблённой части дохода предыдущего периода и накопленным сбережениям, отложенным два периода назад. Таким образом, $C_t = (1-s)Y_{t-1} + sY_{t-2}$. Пусть, как обычно, $Y_t = C_t + I_t$, тогда, подставляя в это соотношение выражения для I_t и C_t, получим разностное уравнение: $Y_t - Y_{t-1} = (v-s)(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - v(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3$. Прирост дохода обозначим $Z_t = Y_t - Y_{t-1}$, тогда получим $Z_t = (v-s)Z_{t-1} - vZ_{t-1}^3$. Далее автор модели утверждает, что можно так перемасштабировать переменные, входящие в последнее уравнение (это показано в [22]), что в новом масштабе оно будет выглядеть следующим образом: $Z_t = \lambda Z_{t-1} - (\lambda+1)Z_{t-1}^3$; последнее уравнение содержит только один параметр, и является удобным для исследования. Динамика полученной системы подробно исследована в [9] и [22]. При $\lambda < 2$ отображение имеет две неподвижные точки и не имеет периодических орбит. Орбита периода два рождается при переходе через значение $\lambda = 2$. Так, при значении $\lambda \approx 2{,}25$ рождается устойчивая периодическая орбита периода 4 (орбита периода 2 теряет устойчивость), а при $\lambda \approx 2{,}295$ – периодическая орбита периода 8. Можно представить себе степень усложнения динамики данного отображения при возрастании параметра. При $\lambda \approx 2{,}4$ у отображения уже имеется бесконечное число периодических орбит различных периодов и имеет место ситуация, определяемая словом «хаос». Таким образом, представленная динамическая система с дискретным временем описывает циклы деловой активности при наличии хаотических режимов.

Безусловно, модель Пу, рассмотренная выше, слишком упрощает реальные процессы и носит некий декларативный характер. Тем не менее она демонстрирует возможности данного способа моделирования, а именно возможность «поймать» хаотический режим.

Традиционные методы статистического анализа хорошо работают в ситуациях, когда качественных изменений в динамике не случается. Спады и депрессии же, с одной стороны, предсказуемы, то есть все знают, что когда-нибудь что-то подобное в экономике произойдёт. С другой стороны, более точный прогноз неблагоприятного развития обычно встречает затруднения. Как известно, великая депрессия 1929-1933 года началась внезапно, и в книге [8] со ссылкой на работу [13] утверждается, что, «ни современные аналитики, ни новейший аппарат анализа временных рядов не могут дать прогноз обвального падения производства, названного Большим Крахом». Последний финансовый кризис так же продемонстрировал весьма узкие возможности прогнозистов, пользующихся только статистическими методами. Моделирование экономической динамики методами теории динамических систем, в сочетании с использованием методов статистического анализа, эконометрического моделирования и т.д., имеет хорошие перспективы в смысле более точного прогнозирования и управления. Возможно, в будущем такие модели позволят вполне осмысленно управлять экономикой, не допуская «сползания» определённых параметров в ту область значений, в которой возможны кризисы и другие неприятности.

На русском языке имеется хороший обзор по проблематике моделирования экономических циклов в историческом и современном аспектах, см. [28] и [29].

Литература

1. Robinson C. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. - 2nd ed. - CRC Press LLC, 1999. - 506 p.
2. F.C. Hoppensteadt, J.M. Hyman. Periodic Solutions of a Logistic Difference Equanion. // SIAM Journal of Applied Mathematics - 1977 - Vol. 32 - No. 1, - pp.73-81.
3. Day, R.H. Irregular Growth Cycles. //The American Economic Review – 1982 - Vol. 72 - No3 - pp. 406-414.
4. Simonovits A. Mathematical methods in dynamical economics. - Basingstoke etc: Macmillan Press LTD, 2000 - 317 p.
5. Benhabib J., Day R., Rational Choice and Erratic Behavior. // The Review of Economic Studies – 1981 – 3 – pp. 459-471.
6. Bala V., Majumdar M., Mitra T. A note on controlling a chaotic tatonnement. // Journal of Economic Behavior & Organization. – 1998. - Vol. 33. - pp. 411 - 420.
7. Воробьев А.А., Круглов Е.В., Якимова Д.С. Переходный процесс по Вальрасу в случае хаотической динамики цены. // Государственное регулирование экономики, Н.Новгород, ННГУ, 2009, с. 337-341.
8. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. Пер. с англ. – М.: Мир, 1999.
9. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. Пер. с англ. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
10. Allen R.G.D. Mathematical Economics. – London: Macmillan, 1956.
11. Business Cycle Dynamics: Models and Tools./ Puu T., Sushko I. (Editors) – Springer-Verlag, 2006.
12. Chang W.W., Smyth D.J. The Existence and Persistence of Cycles in a Non-Linear Model: Kaldor’s 1940 Model Re-examined // Review of Economic Studies. 1971. Vol.38. No.1, p. 37-44.
13. Dominguez K.M., Fair R.C., Shapiro M.D. Forecasting the Depression: Harvard Versus Yale // American Economic Review. 1988. Vol. 78. No.4, p. 595-612.
14. Hicks J.R. A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. – Oxford University Press, 1950.
15. Gabisch G., Lorenz H.-W. Business Cycle Theory: A Survey of Methods and Concepts. – Springer-Verlag, 1989.
16. Goodwin R.M. The Nonlinear Accelerator and Persistence of Business Cycle // Econometrica. 1951. Vol.19. No.1, p. 1-17.
17. Kaldor N. A Model of the Trade Cycle // Economic Journal. 1940. Vol. 50. No.1, p. 78-92.
18. Kalecki M. A Theory of the Business Cycle // Review of Economic Studies. 1937. Vol.38. No. 1, pp. 77-97.
19. Keynes J.M. The General Theory of Employment Interest, and Money. – London: Macmillan, 1936.
20. Phillips A.W. Stabilization Policy in a Closed Economy // Economic Journal. 1954. Vol. 64. No.254, p. 290-323.

21. Puu T., Gardini L., Sushko I. On the change of periodicities in the Hicksian multiplier-accelerator model with a consumption floor // Chaos, Solitons and Fractals. 2006. Vol. 29. No.3, p. 681–696.
22. Puu T., Sushko I. A business cycle model with cubic nonlinearity // Chaos, Solitons and Fractals. 2004. Vol. 19. No.3, p. 597–612.
23. Puu T. Short History of the Multiplier-Accelerator Model // Business Cycle Dynamics: Models and Tools. – Springer-Verlag, 2006, p. 79-112.
24. Samuelson P.A. Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration // The Review of Economics and Statistics. 1939. Vol. 21. No. 2, p. 75-78.
25. Vogt W. Fluktuationen in einer wachsender Wirtschaft unter klassischen Bedingunger // Wachstum, Einkommensverteilung und wirtschaftliches Gleichgewicht. – Berlin: Duncker und Humblot, pp. 61-72.
26. Круглов Е.В. Одномерные отображения и моделирование экономической динамики. Учебно-методическое пособие. Н. Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2010 г.
27. Круглов Е.В. Циклы деловой активности. Учебно-методическое пособие. ФОЭР, рег. №529.12.06
28. Кузнецов Ю.А. Математическое моделирование циклов деловой активности: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. №17(224), 2011 г. С. 50-61.
29. Кузнецов Ю.А. Математическое моделирование циклов деловой активности: факты, концепции, результаты // Экономический анализ: теория и практика. №18(225), 2011 г. С. 42-57.
30. Круглов Е.В. О некоторых моделях циклов деловой активности // Экономический анализ: теория и практика. №8 (215), 2011г., с.44-50.

Содержание

Евгений Валентинович **Круглов**

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ЭКОНОМИКЕ

Учебно-методическое пособие

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603095, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.